**Espaces préhilbertiens**

**Espaces préhilbertiens réels**

Dans toute cette partie, désigne un -ev (de dimension finie ou non).

**Définitions**

Définition : (produit scalaire)

Le produit scalaire (p.s.) sur un -ev désigne toute application vérifiant :

1. est bilinéaire, ie est linéaire selon chacune de ses variables.
2. est symétrique :
3. est positive, ie
4. est définie, ie

En d’autres termes, un p.s. sur est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarques :

1. Pour montrer la bilinéarité symétrique, on a juste à montrer la linéarité à droite et la symétrie.
2. Si est bilinéaire, alors

Donc pour la partie (iv), il suffit de montrer le sens direct de l’équivalence.

Propriété : Soit

Alors est un produit scalaire sur ssi :

1. est bilinéaire
2. est symétrique

Définition : (espace préhilbertien réel)

On appelle espace préhilbertien réel tout couple où est un -ev et un produit scalaire. Dans ce cas, il est usuel de noter : le produit scalaire .

Définition : On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

**Exemples à connaître :**

**Produit scalaire usuel sur**

Propriété : Soit . L’application définie par :

est un produit scalaire sur . On l’appelle le p.s. canonique (ou usuel) sur

Démonstration : ⍟

* Par construction, on a bien
* Linéarité à droite : Soient
* Soient

Alors

Donc est bien symétrique.

* Soit , alors

Donc est définie positive.

Donc c’est un produit scalaire sur

Exemple : définie par ,

**Produit usuel sur**

Propriété : Soient . L’application définie par

est un produit scalaire sur appelé p.s. canonique

Démonstration : ⍟

* Soient donc le produit est bien défini et donc existe et appartient à
* Soient
* Soient
* Soit notons , alors par calcul,

De plus,

Donc c’est bien un p.s. sur .

**Produit scalaire canonique sur**

Propriété : Soient notons .

L’application définie par :

est un p.s. sur appelé produit scalaire canonique sur .

Démonstration : Soient alors la fonction est continue sur donc intégrable sur ce segment.

* La symétrie de provient de la commutativité du produit :
* Soit ,

De plus,

Remarque : Si on a un produit scalaire sur et un sev de , alors le même produit restreint à reste un produit scalaire sur .

**Norme euclidienne**

Dans cette partie, désigne un espace préhilbertien réel et on notera son produit scalaire associé.

Définition : On appelle norme euclidienne sur l’application définie par :

Exemple : Dans muni de son p.s. canonique,

Exemple : Soient

Soient

De même,

Et

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit un espace préhilbertien réel. On rappelle qu’on note . Alors

avec égalité si et seulement si la famille est liée.

Démonstration : ⍟

Soient .

Si , alors . Ainsi il y a bien égalité et la famille est liée

Si , posons

Ainsi est une fonction polynômiale de degré 2, à valeurs . Ainsi admet au plus une racine réelle, donc son discriminant .

Ainsi

De plus, on a tq

tq

tq

tq

est liée

Propriété : Soit un espace préhilbertien réel.

La norme euclidienne est une norme sur .

On l’appelle norme associée au produit scalaire .

Propriété : (Identités de polarisation)

Soit un espace préhilbertien réel. On note la norme associée à .

on a

Démonstration : ⍟

Soient .

ce qui donne la première égalité.

ce qui donne la deuxième égalité.

Et , ce qui donne la dernière égalité.

Propriété : Identité du parallélogramme

Soit un espace préhilbertien réel dont on note la norme euclidienne associée.

**Espaces préhilbertiens complexes**

Dans toute cette partie, est un -ev (de dimension quelconque).

Le produit scalaire n’a plus de sens :

Définition : On appelle produit hermitien sur un -ev toute application vérifiant :

1. est sesquilinéaire, ie est linéaire en sa 2nde variable et semi-linéaire en sa 1ère :
2. est à symétrie hermitienne, ie
3. est positive :
4. est définie : , on a

Un produit scalaire hermitien sur est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Attention : on a donc . Ainsi on peut parler de positivité.

En général , on a donc pas lieu d’écrire «  »

Propriété : Soit un -ev et . Alors est un produit scalaire hermitien sur ssi :

1. est sesquilinéaire

Définition :

On appelle espace préhilbertien complexe tout couple où est un -ev et est un produit scalaire hermitien sur . On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe où .

**Exemples à connaître :**

Propriété : Soit . L’application définie par :

est un produit scalaire hermitien sur appelé produit scalaire canonique sur .

Démonstration : ⍟

* Linéarité à droite : comme sur les réels

Propriété : Soient . L’application définie par

Est un produit scalaire hermitien sur , appelé canonique.

Propriété :

Soient et . L’application définie par

définit un produit scalaire sur appelé produit scalaire canonique sur .

**3) Norme hermitienne**

Soit un espace préhilbertien complexe. Pour , posons .

Soient

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit un espace préhilbertien complexe. Pour tout , on note .

Alors

Avec égalité si la famille est liée.

Corollaire :

Soit un espace préhilbertien complexe. L’application est une norme sur appelée norme hermitienne sur (aussi appelée norme associée au p.s. hermitien ).

Propriété : Soit un espace préhilbertien complexe. On note la norme hermitienne sur associée à .

1. Identités de polarisation
2. Identité du parallélogramme

**III) Matrice d’un produit scalaire**

Soit un espace euclidien ou hermitien avec . Soit une base de .

Pour tous (resp. ) , (resp. () tel que

Ainsi est entièrement caractérisé par la donnée des termes pour

Définition : Soient un espace euclidien ou hermitien de dimension et une base de . On appelle matrice du produit scalaire dans la base la matrice :

De plus, pour tous , on a

Effet d’un changement de base

Soit une autre base de . Notons .

Pour , notons

Et

, donc

D’autre part,

Ainsi on a :

Propriété :

Soit un espace euclidien ou hermitien de dimension et deux bases de . Alors

Où